



მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 111

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$x=0 \Rightarrow f(0) = f(f(0))$ $x=0 \Rightarrow f(y \cdot f(0)) = f(f(0)) = f(0) = c$

დავუშვათ $c \neq 0$, მაშინ $f(y \cdot f(0)) = f(y \cdot c) = c$ მიიღებ ყველა y -სთვის, ანუ $f(x) = c$ ყველ x -სთვის, მაშინ $f(x) = c$ ნებისმიერ x -სთვის.

$c = c + x \cdot c \Rightarrow x \cdot c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ x=0 \end{cases}$, ზღუდ ნებისმიერ x ავსებთ, $c=0 \Rightarrow f(x) = 0$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, $f(0) = 0$. მაშინ სავსებით:

$y=0 \Rightarrow f(x) = f(f(x))$ (1)

დავუშვათ f ფუნქციის სურათი; ანუ ვიხვეწოთ, რომ $a, y \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

~~$f(x) \Rightarrow f(f(x) + b \cdot f(x)) = f(x) + b \cdot f(x)$~~

ანუ f და f დახვეწილი, ვაძლავს $a, y \quad f(f(x)) = f(f(y)) = \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. ანუ f დახვეწილი,

დავუშვათ: $f(x + f(x) \cdot y) = f(x) + x \cdot f(y)$ მივიღოთ მხვე

შედეგად $f(x) + f(x) \cdot y = f(x) + x \cdot f(y)$ მაშინ $f(x + f(x) \cdot y) = f(f(x) + x \cdot f(y))$, ხოლო $f(f(x) + f(x) \cdot y) = f(x + f(x) \cdot y) = f(f(x) + x \cdot f(y)) \Rightarrow x + f(x) \cdot y = f(x) + x \cdot f(y)$



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 111

ამოცანა №

4

გვერდი №

2

სვსვით $y=0$, რ ვაშვს $x=f(x)$.

სვსვით $x=a$ $y=\frac{a-b}{f(b)-f(a)}$ რ $x=b$ $y=\frac{a-b}{f(b)-f(a)}$

$$f\left(a + \frac{a-b}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)\right) = f(a) + a f\left(\frac{a-b}{f(b)-f(a)}\right)$$

$$f\left(a + \frac{a-b}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)\right) = f\left(\frac{a f(b) - a f(a) + f(a) a - f(a) b}{f(b)-f(a)}\right) = f\left(\frac{a f(b) - f(a) b}{f(b)-f(a)}\right) \equiv f(x)$$

$$f\left(b + \frac{a-b}{f(b)-f(a)} \cdot f(b)\right) = f(b) + b f\left(\frac{a-b}{f(b)-f(a)}\right)$$

$$f\left(b + \frac{a-b}{f(b)-f(a)} \cdot f(b)\right) = f\left(\frac{f(b) b + f(a) b + f(b) a - f(b) b}{f(b)-f(a)}\right) \equiv f(x)$$

სვს

$$f(x) = f(a) + f\left(\frac{a-b}{f(b)-f(a)}\right) \cdot a = f(b) + f\left(\frac{a-b}{f(b)-f(a)}\right) \cdot b \Rightarrow a=b.$$

რ. რ. გ.



მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 111

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$$\frac{1}{a^2-2a+5} = \frac{1}{a^2-2a+4+1} = \frac{1}{(1-a)^2+4} = \frac{1}{(b+c)^2+4}$$

$$\frac{1}{(b+c)^2+4} + \frac{1}{(a+c)^2+4} + \frac{1}{(a+b)^2+4} \stackrel{?}{=} X$$

აე სვავთ $a=1$ $b=0$ $c=0$, მაშინ $X = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

ვჩვენებთ, რომ $X \geq \frac{7}{10}$

$$7((a+b)^2+4)((a+c)^2+4)((b+c)^2+4) \leq 10((a+b)^2+4)((a+c)^2+4) + ((a+b)^2+4)((b+c)^2+4) + ((a+c)^2+4)((b+c)^2+4)$$

გავხსნათ ვხედავთ, რომ $(a+b+c)^2 \geq 2$ და $4 - 2(a+b+c)^2$ და $4 - 2(a+b+c)^2$